Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 21. März 2002 Arbeitszeit: 75 Minuten

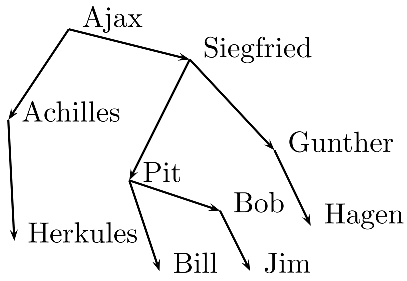
1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Ein Känguru hüpft von Kegelhausen ins 17 km entfernte Würfelsburg, wobei es von Sprung zu Sprung seine Sprungweite verdoppelt. Wenn es beim ersten Sprung 1 m weit springt, wie viele Sprünge braucht es dann, bis es weniger als 1 km vom Ziel entfernt ist?

(**A**) 11 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 17 (**E**) 18

2. Maxie hat – beim Stammvater Ajax beginnend – den Stammbaum der männlichen Tiere ihrer Mäusezucht gezeichnet. Dabei sind die Pfeile je von Mausvater zu Maussohn gerichtet. Wie heißt der Sohn des Bruders des Großvaters des Bruders von Jims Vater?



(**A**) Pit (**B**) Hagen (**C**) Siegfried
(**D**) Herkules (**E**) Achilles

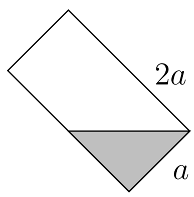
3. Ein Körper, dessen sämtliche Seitenflächen Vielecke sind, heißt Polyeder. Welches ist die kleinste Anzahl von Seitenflächen, die ein Polyeder haben kann, das ein 12-Eck als Seitenfläche besitzt?

(**A**) 24 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 16 (**E**) 13

4. Wenn ein Hotel in den 3 Sommermonaten eine Auslastung von 88% und in den restlichen von 44% hat, wie hoch ist dann die Auslastung auf das ganze Jahr bezogen? (*Monate werden mit 30 Tagen angesetzt.*)

(**A**) 132% (**B**) 66% (**C**) 55% (**D**) 51,5% (**E**) 48%

5. Ein zylindrisches Glas, dessen Höhe doppelt so groß wie der Durchmesser der Grundfläche ist, ist in einem Winkel von 45° gekippt (s. Abb.). Wie viel Prozent des Glases sind gefüllt?



(**A**) weniger als 25% (**B**) 25% (**C**) 33%
(**D**) $33\frac{1}{3}$% (**E**) mehr als $33\frac{1}{3}$%

6. Es seien a und b positive ganze Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 3 ist. Weiterhin sei $\frac{a}{b} = 0,4$. Dann ist $a \cdot b =$

(**A**) 18 (**B**) 10 (**C**) 36 (**D**) 30 (**E**) 90

7. Wie viele Kanten hat ein Prisma mit 2002 Ecken?

(**A**) 3003 (**B**) 1001 (**C**) 2002 (**D**) 4002 (**E**) 2001

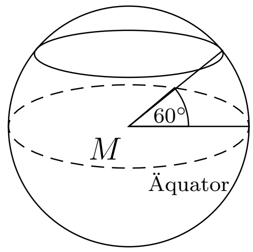
8. Beim Einfrieren nimmt Wasser um 1/11 seines Volumens zu. Um welchen Teil seines Volumens nimmt gefrorenes Wasser beim Auftauen ab?

(**A**) um 1/11 (**B**) um 1/10 (**C**) um 1/14 (**D**) um 1/12 (**E**) um 1/13

9. Es sei N eine dreistellige Zahl, N' die Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern von N in der umgekehrten Reihenfolge aufschreibt. Dann ist $|N - N'|$ gewiss teilbar durch

(**A**) 5 (**B**) 12 (**C**) 7 (**D**) 18 (**E**) 99

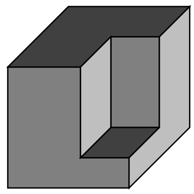
10. Der Äquator ist etwa 40 000 km lang. Die Länge des Breitenkreises auf 60° nördlicher Breite beträgt (auf 100 km gerundet)



(**A**) 20 000 km (**B**) 23 500 km (**C**) 26 700 km
(**D**) 31 000 km (**E**) 34 600 km

4-Punkte-Aufgaben

11. Aus einem Marmorwürfel mit einem Volumen von 125 dm^3 ist ein kleiner Quader – wie in der Abbildung dargestellt – herausgemeißelt worden. Welchen Flächeninhalt hat die Oberfläche des Restkörpers?



(**A**) 320 dm^2 (**B**) 250 dm^2 (**C**) 150 dm^2
(**D**) 625 dm^2 (**E**) zur Berechnung sind weitere Angaben nötig

12. Bei einem Tischtennisturnier spielen 10 Mannschaften, jede gegen jede genau einmal. Wie üblich gibt es für die Verlierermannschaft 0 Punkte, für den Gewinner 3 Punkte und bei Unentschieden für jeden 1 Punkt. Wenn insgesamt 130 Punkte vergeben wurden, wie viele Male wurde dann Unentschieden gespielt?

(**A**) 1-mal (**B**) 2-mal (**C**) 3-mal (**D**) 4-mal (**E**) 5-mal

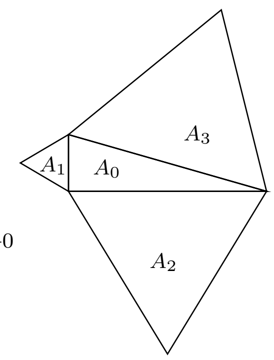
13. Das Alphabet einer fremden Sprache besteht aus den 6 Buchstaben $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$, $\triangle$ und $\triangledown$ in dieser Reihenfolge. Alle Wörter dieser Sprache sind 6-buchstabig, sie entstehen durch Vertauschung der 6 Buchstaben (jeder kommt in jedem Wort genau einmal vor). Welches Wort steht auf Platz 537 im exakt nach dem Alphabet geordneten Wörterbuch?

(**A**) $\triangle\spadesuit\heartsuit\clubsuit\diamondsuit\triangledown$ (**B**) $\triangledown\heartsuit\spadesuit\triangle\clubsuit\diamondsuit$ (**C**) $\clubsuit\spadesuit\triangle\heartsuit\diamondsuit\triangledown$ (**D**) $\triangle\diamondsuit\heartsuit\clubsuit\spadesuit\triangledown$ (**E**) $\diamondsuit\triangle\heartsuit\spadesuit\clubsuit\triangledown$

14. Ordne $\sin 1$, $\sin 2$ und $\sin 3$ der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten Wert

(**A**) $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$ (**B**) $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$ (**C**) $\sin 1 < \sin 3 < \sin 2$
(**D**) $\sin 2 < \sin 1 < \sin 3$ (**E**) $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

15. Die Flächeninhalte der vier Dreiecke in der Abbildung sind A_0, A_1, A_2 und A_3. Das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_0 ist rechtwinklig, die anderen sind gleichseitig. Dann gilt sicher

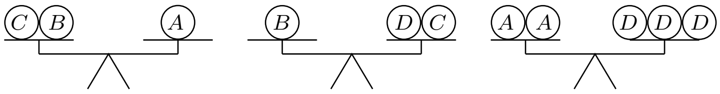


(**A**) $A_1^2 + A_2^2 = A_3^2$ (**B**) $A_1 + A_2 = A_3$ (**C**) $A_1 + A_2 + A_3 = 3A_0$
(**D**) $A_1 + A_2 = \sqrt{2}A_3$ (**E**) $3A_0 + 2A_1 = A_2 + A_3$

16. Bei der Produktion eines Werkstückes können durch die Einführung einer Neuerung 50% der Kosten gespart werden, durch eine zweite, von der ersten unabhängige, 40% und durch eine dritte, von beiden anderen unabhängige, 10%. Um wie viel Prozent lassen sich die Kosten durch gleichzeitige Einführung aller drei Neuerungen senken?

(**A**) um 100% (**B**) um 73% (**C**) um 92% (**D**) um 87% (**E**) um 98%

17. Wievielmal ist das Gewicht von C im Gewicht von B enthalten?



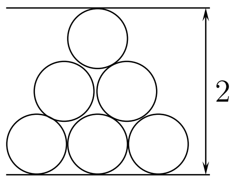
(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 5-mal (**D**) 6,5-mal (**E**) 7-mal

18. In einer Folge positiver rationaler Zahlen ist mit Ausnahme der ersten beiden jedes Element gleich der Summe aller seiner Vorgänger. Das 11. Element ist 1000, das erste 1. Welches ist das 2. Element?

(**A**) 2 (**B**) $\frac{93}{32}$ (**C**) $\frac{255}{64}$

(**D**) $\frac{109}{16}$ (**E**) Das läßt sich nicht berechnen.

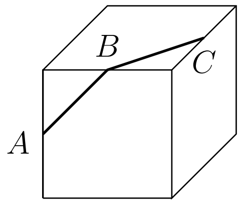
19. Die Höhe der Figur, die aus 6 Kreisen vom Radius r gebildet wird (s. Zeichnung), beträgt 2. Dann ist $r =$



(**A**) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ (**B**) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ (**C**) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$

(**D**) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ (**E**) $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

20. Es seien A, B und C die Mittelpunkte der Würfelkanten (s. Abb.). Wie groß ist der Winkel, den die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ einschließen?



(**A**) 90° (**B**) 100° (**C**) 110° (**D**) 120° (**E**) 135°

5-Punkte-Aufgaben

21. Das Känguru gibt der Maus bei einem Wettlauf der beiden 990 m Vorsprung. Sie starten gleichzeitig, das Känguru mit einer Geschwindigkeit von 10 m/sec, die Maus mit 1 m/10 sec. Nach welcher Zeit hat das Känguru die Maus eingeholt?

(**A**) in 1 min 40 sec (**B**) in 990 sec (**C**) in 1 min 39 sec

(**D**) in 1 min 50 sec (**E**) nie

22. Es seien 10 Punkte in der Ebene gegeben. Genau 5 dieser Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Auf jeder Geraden durch zwei der restlichen Punkte liegt kein weiterer der 10 Punkte. Wie viele (nicht zu einer Strecke ausgeartete) Dreiecke bilden diese 10 Punkte?

(**A**) 20 (**B**) 50 (**C**) 64 (**D**) 81 (**E**) 110

23. Wir betrachten die Zahl $2003! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2003$. Offenbar ist 2002 ein Teiler von $2003!$, da ja $2003! = 2001! \cdot 2002 \cdot 2003$ ist. Welches ist die größte Zahl k, für die 2002^k ein Teiler von $2003!$ ist?

(**A**) 2001 (**B**) 165 (**C**) 69 (**D**) 2 (**E**) 1

24. Auf einem Hochzeitsfoto sind die Verwandten der Braut und des Bräutigams zu sehen, insgesamt mehr als 27 Personen. Als Emmi mit ihrem Buch 12 Verwandte des Bräutigams zudeckt, bemerkt ihre Tante, dass es bei den Nichtverdeckten mehr als doppelt so viele Verwandte der Braut wie des Bräutigams gibt. Und als Emmi ihr Buch weiterschiebt und nun 10 Verwandte der Braut zudeckt, findet ihre Tante, dass unter denen, die nun zu sehen sind, mehr als neunmal so viele Verwandte des Bräutigams wie der Braut sind. Da Emmi immer viele gute Ideen hat, findet sie aus diesen Angaben heraus, wie viele Verwandte der Braut und des Bräutigams insgesamt auf dem Bild zu sehen sind. Es sind

(**A**) 12 und 18 (**B**) 11 und 17 (**C**) 10 und 20 (**D**) 13 und 15 (**E**) 11 und 23

25. Wie viele nicht zueinander kongruente Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte Eckpunkt in einem regelmäßigen Zehneck sind? (*Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in drei Seiten – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge – übereinstimmen.*)

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

26. Wie viele natürliche Zahlen zwischen 1 und 10^{2002} haben die Quersumme 2? (*Als Quersumme einer Zahl wird die Summe ihrer Ziffern bezeichnet.*)

(**A**) 2 007 006 (**B**) 2 005 003 (**C**) 2 003 001 (**D**) 2 005 002 (**E**) 10^{202}

27.* In einem Gefäß befinden sich 2,1 l einer 18%-igen Salzsäurelösung. Wie viel Liter dieser Flüssigkeit müssen durch eine 90%-ige Salzsäurelösung ersetzt werden, damit wir schließlich 2,1 l einer 42%-ige Salzsäurelösung erhalten?

(**A**) 0,07 l (**B**) 0,5 l (**C**) 0,7 l (**D**) 0,93 l (**E**) 1,3 l

28. Wenn $a+b+c=7$ und $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$ ist, dann ist $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=$

(**A**) 1 (**B**) $\frac{19}{10}$ (**C**) $\frac{9}{7}$ (**D**) 2 (**E**) $\frac{10}{7}$

29. Max, Moritz und Marta verkürzen sich die Autofahrt mit einem Spiel. Sie notieren bei allen LKW, die sie überholen, die Kenn-Nummern, sofern diese vierstellig sind, also zwischen 1000 und 9999 liegen. Wenn diese Zahl gerade ist, bekommt Max einen Punkt; ist sie durch 3 oder 5 teilbar, bekommt Moritz einen; ist die Kennzahl durch keine der Zahlen 2, 3 und 5 teilbar, bekommt Marta einen Punkt.
Das ist aber ungerecht, wendet die Mutter ein. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl der günstigen und der Anzahl der möglichen Fälle.

(**A**) Die Wahrscheinlichkeit, dass Max einen Punkt bekommt, ist gleich der, dass Moritz einen bekommt.

(**B**) Die Wahrscheinlichkeit, dass Moritz einen Punkt bekommt, ist größer als die, dass Marta einen bekommt.

(**C**) Die Wahrscheinlichkeit, dass Marta einen Punkt bekommt, ist gleich der, dass Max einen bekommt.

(**D**) Die Wahrscheinlichkeit, dass Moritz einen Punkt bekommt, ist größer als die, dass Max einen bekommt.

(**E**) Die Mutter hat sich geirrt.

30. Wie viele positive ganzzahlige Lösungen (x, y) mit $x < y$ hat die Gleichung $x + y + xy + 1 = 2002$?

(**A**) keine (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 14

* Anmerkungen zu Aufgabe 27:

Zu dieser Aufgabe gibt es wichtige chemische Einwände, die uns von Dr. Hans-Otto Burmeister aus Braunschweig übermittelt wurden. Diese wollen wir all denen, die sich mit dieser Aufgabe beschäftigt haben bzw. beschäftigen wollen, zur Verfügung stellen.

1. Die gestellte Aufgabe ist inhaltlich unsinnig, da weder eine 42 %-ige geschweige denn eine 90 %-ige Salzsäure darstellbar ist. Das Gas Hydrogenchlorid (HCl) löst sich in Wasser nur bis zu einem Massenanteil von maximal 39 %.

2. Die Angabe 42 % im Zusammenhang mit einem Volumen widerspricht allen sinnvollen und zulässigen Angaben von Konzentrationen (DIN 1310, gültig seit Februar 1984). Die Angabe von Prozent (%) oder Promille (‰) ist nur bei gleichen Einheiten für die Zählergröße und für die Nennergröße zulässig (z.B. g je g, mg je mg, mol je mol...). Im Zusammenhang mit einem Volumen wäre nur die Angabe der Massenkonzentration b (= Masse je Volumen) zulässig, nur dies ist keine Prozentangabe.

3. Das erwartete Ergebnis ist wohl $C = 0,7\,\mathrm{l}$. Dies ist zwar rechnerisch nachvollziehbar $(90\,\% \times 0,7\,\mathrm{l} + 18\,\% \times 1,4\,\mathrm{l}) : 2,1\,\mathrm{l} = 42\,\%$, aber dennoch falsch, und zwar aufgrund der Definition der Angabe Prozent (siehe unter 2), da so nicht gerechnet werden darf. Außerdem fehlt die Berücksichtigung der Tatsache, dass beim Mischen von Lösungen unterschiedlicher Konzentrationen der sogenannte Volumenschwund auftritt. Das heißt im Klartext: Beim Mischen der beiden Lösungen $1,4\,\mathrm{l}$ („18 %") und $0,7\,\mathrm{l}$ („90 %") entstehen tatsächlich nicht $2,1\,\mathrm{l}$ Gesamtvolumen sondern weniger.
   Dazu die korrekte Berechnung mit den obigen Werten am Beispiel Schwefelsäure (für diese existieren die in der Aufgaben angegebenen Massenkonzentrationen):
   Folgende Mengen an Schwefelsäure werden gemischt:

   $$0,7\,\mathrm{l}\ \text{Schwefelsäure} \quad (w_{\mathrm{i}} = 90\,\%; \text{Dichte} = 1,814\,\mathrm{g/ml})$$

   $$1,4\,\mathrm{l}\ \text{Schwefelsäure} \quad (w_{\mathrm{i}} = 18\,\%; \text{Dichte} = 1,123\,\mathrm{g/ml})$$

   Welchen Massenanteil an Schwefelsäure hat die entstandene Mischung?
   Die Masse an reiner Schwefelsäure wird jeweils als das Produkt aus Massenanteil, dem Volumen und der Dichte angegeben (alles andere wäre physikalisch unsinnig):

   $$\frac{0.90 \cdot 0,7 \cdot 1,814 + 0,18 \cdot 1,4 \cdot 1,123}{0,7 \cdot 1,814 + 1,4 \cdot 1,123} = \frac{1,4258}{2,842} = w_{\mathrm{X}}$$

   Also ist $w_{\mathrm{X}} = 0,502$, also $50,2\,\%$ Massenanteil; das heißt die tatsächliche „Konzentration" beträgt 50,2 g reine Schwefelsäure in 100 g Gesamtlösung.
   Bei der Addition der Einzelvolumina erhält man ein Gesamtvolumen von $2,1\,\mathrm{l}$ an Schwefelsäure. Die Gegenprobe ergibt aber, dass die oben berechnete Schwefelsäure ($w_{\mathrm{i}} = 50,2\,\%$) eine Dichte von $1,397\,\mathrm{g/ml}$ aufweist. (Diese Angaben sind in Tabellenbüchern der Chemie zu finden.) Da insgesamt 2,842 kg der Schwefelsäuremischung entstehen (Summe des Nenners), ergibt sich daraus ein Volumen von $2,842\,\mathrm{kg} : 1,397\,\mathrm{kg/l} = 2,034\,\mathrm{l}$ und nicht – wie oben falsch berechnet – ein Gesamtvolumen von $2,1\,\mathrm{l}$. Dieser Volumenverlust („Volumenschwund"), der beim Mischen von Lösungen unterschiedlicher Konzentrationen entsteht und hier immerhin $3,1\,\%$ beträgt, erfordert grundsätzlich das Berechnen der Konzentration von Mischungen mithilfe der jeweiligen Massen der einzelnen Lösungen, da nur die Summe der Einzelmassen aller Bestandteile eine berechenbare Größe darstellt. Bei der Berechnung mithilfe der Einzelvolumina wird das erhaltene Ergebnis grundsätzlich falsch.