Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 20. März 2003 Arbeitszeit: 75 Minuten

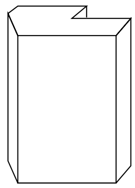
1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

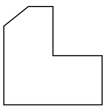
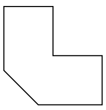
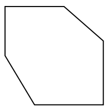
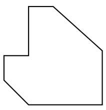
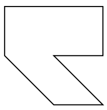
3-Punkte-Aufgaben

1. Im Zirkuszug fuhr Känguru Max im 7. Wagen von vorn, während das Kängurufräulein Lisa im 6. Wagen von hinten untergebracht war. Zwischen beiden war genau ein Wagen. Wie viele Wagen hatte der Zug?

(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 13
(**D**) weniger als 13 (**E**) das ist unbestimmt

2. Welcher Grundriss gehört zum rechts abgebildeten Schrägbild?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

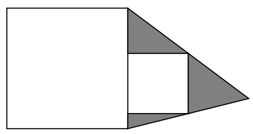
3. Axel wollte das Volumen einer Kugel ausrechnen, verwendete aber statt des Radius, der in die Formel einzusetzen war, den Durchmesser. Was sollte er mit seinem Resultat tun, um das richtige Ergebnis zu bekommen?

(**A**) verdoppeln (**B**) π addieren (**C**) durch 3 teilen
(**D**) durch 8 teilen (**E**) durch 4π teilen

4. $2^{n+2003} + 2^{n+2003} =$

(**A**) 2^{n+2004} (**B**) $2^{2n+4006}$ (**C**) $4^{2n+4006}$ (**D**) $4^{2n+2003}$ (**E**) 4^{n+2003}

5. Die Abbildung zeigt 2 Quadrate, deren Seitenlängen 2 m bzw. 1 m sind. Welchen Flächeninhalt hat das grau gefärbte Gebiet?

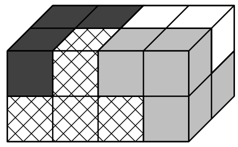


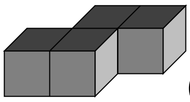
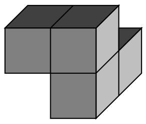
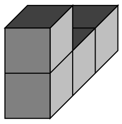
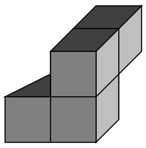
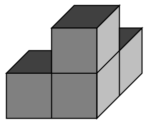
(**A**) 1 m^2 (**B**) 2 m^2 (**C**) $2\sqrt{2}$ m^2
(**D**) 4 m^2 (**E**) Das hängt von der Lage des kleinen Quadrats ab.

6. In der Statistik einer Schule ist zu lesen, dass in den Jahren von 1999 bis 2002 durchschnittlich 325 Schülerinnen und Schüler pro Jahr aufgenommen wurden. Es wird erwartet, dass mit den Neuaufnahmen zum Schuljahresbeginn im Jahre 2003 die durchschnittliche Zahl der Aufnahmen pro Jahr bezogen auf den Zeitraum von 1999 bis 2003 um 8% steigt. Wie viele Schüler würden dann zum Schuljahresbeginn neu aufgenommen werden?

(**A**) 315 (**B**) 395 (**C**) 455 (**D**) 495 (**E**) 570

7. Ein Quader ist aus 4 Bausteinen, von denen jeder aus 4 Würfeln besteht, gebaut worden (s. Abb.). Welcher der Bausteine ist der weiße?

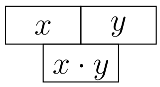


(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

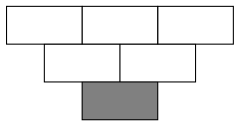
8. Die Menge aller Parameter m, für die die Kurven $x^2 + y^2 = 1$ und $y = x^2 + m$ genau einen gemeinsamen Punkt haben, ist

(A) $\left\{-\frac{5}{4}; -1; 1\right\}$ **(B)** $\left\{-\frac{5}{4}; 1\right\}$ **(C)** $\{-1; 1\}$ **(D)** $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ **(E)** $\{1\}$

9. In dem abgebildeten Schema ist wie im Muster beim Ausfüllen der Felder zu verfahren. Dabei wird vorausgesetzt, dass in der obersten Zeile natürliche Zahlen, die größer als 1 sind, stehen. Welche von den Zahlen (**A**) bis (**E**) kann nicht im grau gefärbten Feld stehen?

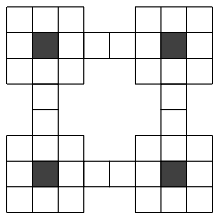


Muster



(A) 154 **(B)** 100 **(C)** 90 **(D)** 88 **(E)** 60

10. Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle weißen Felder in der abgebildeten Figur mit 1×2-Steinchen  vollständig zu bedecken?



(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 32 **(D)** 64 **(E)** 65

4-Punkte-Aufgaben

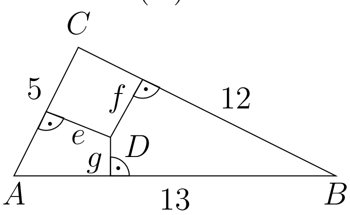
11. Ein Computer druckt eine Liste der siebenten Potenzen aufeinander folgender natürlicher Zahlen, beginnend mit 1^7, 2^7, 3^7, ... Wie viele Elemente dieser Folge sind größer als 5^{21} und kleiner als 2^{49}?

(A) 13 **(B)** 8 **(C)** 5 **(D)** 3 **(E)** 2

12. Björn hat 9 Buntstifte, davon ist *mindestens einer* blau. Nimmt man irgendwelche 4 dieser Buntstifte wahllos aus der Federtasche heraus, sind *stets mindestens 2* von gleicher Farbe. Nimmt man irgendwelche 5 dieser Buntstifte wahllos heraus, so sind *stets höchstens 3* von gleicher Farbe. Wie viele blaue Stifte hat Björn?

(A) 6 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** 4 **(E)** unbestimmt

13. Das Dreieck ABC mit den Seitenlängen 5, 12 und 13 hat den Flächeninhalt 30. Der Punkt D wird beliebig im Innern des Dreiecks gewählt; mit e, f und g seien die Abstände von D zu den Dreiecksseiten bezeichnet. Dann ist $5e + 12f + 13g =$



(A) 120 **(B)** 90 **(C)** 60
(D) 30 **(E)** das hängt von der Lage von D ab

14. $\sqrt{1 + 2000\sqrt{1 + 2001\sqrt{1 + 2002\sqrt{1 + 2003 \cdot 2005}}}} =$

(A) 2000 **(B)** 2001 **(C)** 2002 **(D)** 2003 **(E)** 2004

15. Zwei weiße und acht graue Möwen fliegen gemeinsam. Plötzlich lassen sich alle in einer Reihe nebeneinander auf einer Mauer nieder. Es ist bekannt, dass es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10 = 3\,628\,800$ Möglichkeiten für die Reihenfolge gibt, in der die Möwen sich hinsetzen. Wenn man die Zahl der Möglichkeiten, in denen die beiden weißen Möwen nebeneinander sitzen, durch die Zahl *aller* Möglichkeiten, wie sich die Möwen niederlassen können, teilt, erhält man

(**A**) $\frac{1}{5}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{7}$ (**D**) $\frac{1}{8}$ (**E**) $\frac{1}{9}$

16. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines spitzwinkligen Dreiecks. Dann ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks gleich

(**A**) 168 (**B**) 80 (**C**) 84 (**D**) $6 \cdot \sqrt{65}$ (**E**) $\frac{195}{2}$

17. Welchen größten Wert kann eine zweistellige Zahl n annehmen, wenn gilt, dass $10^n + 1$ ein Vielfaches von 101 ist?

(**A**) 89 (**B**) 92 (**C**) 95 (**D**) 98 (**E**) 99

18. Für welche der folgenden Größenangaben ließe sich ein Dreieck ABC konstruieren?

(**A**) $\overline{AB} = 11, \sphericalangle BAC = 63°, \sphericalangle CBA = 128°$ (**B**) $\overline{AB} = 11, \overline{BC} = 19, \overline{CA} = 7$
(**C**) $\overline{AB} = 11, \overline{BC} = 6, \sphericalangle BAC = 63°$ (**D**) $\overline{AB} = 11, \overline{CA} = 7\ \sphericalangle CBA = 128°$
(**E**) für keine der Angaben (**A**) bis (**D**)

19. $100^2 - 99^2 + 98^2 - \cdots + 2^2 - 1^2 =$

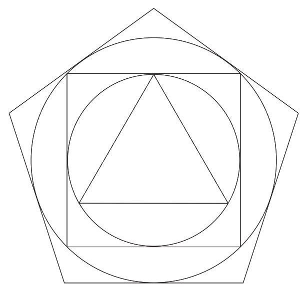
(**A**) 2002 (**B**) -2020 (**C**) 4040 (**D**) 5050 (**E**) 8008

20. Wenn für eine reelle Zahl $a > 0$ gilt, dass $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 6$ ist, dann ist $a^3 + \frac{1}{a^3} =$

(**A**) $4\sqrt{6}$ (**B**) $3\sqrt{6}$ (**C**) 6 (**D**) $5\sqrt{6}$ (**E**) $6\sqrt{6}$

5-Punkte-Aufgaben

21. Ich zeichne abwechselnd Vielecke und Kreise: Ich beginne mit einem gleichseitigen Dreieck, zeichne dessen Umkreis, anschließend mit diesem als Inkreis ein Quadrat, dann den Umkreis des Quadrats usw. bis ich schließlich ein regelmäßiges 16-Eck mit dem Umkreis des 15-Ecks als Inkreis gezeichnet habe (s. Abb.). In wie viele zueinander punktfremde Teile ist das Innere dieses 16-Ecks zerlegt?



(**A**) 232 (**B**) 240 (**C**) 248 (**D**) 264 (**E**) 272

22. Es seien $A > B > 1$ Primzahlen derart, dass auch $A - B$ und $A + B$ Primzahlen sind. Dann gilt für $S = A + B + (A + B) + (A - B)$

(**A**) S ist geradzahlig (**B**) S ist Vielfaches von 3 (**C**) S ist Vielfaches von 5
(**D**) S ist Vielfaches von 7 (**E**) S ist Primzahl

23. Ein Punkt $P(x; y)$ liege auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2; 2)$ und dem Radius $r > 2$. Es ist bekannt, dass $y = r$ ist, und dass x, y und r positive ganze Zahlen sind. Welches ist der kleinstmögliche Wert von x?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 10

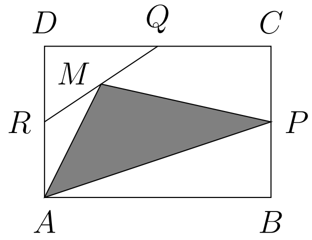
24. Um Preise festzulegen, wird Marktforschung betrieben. Dabei ergeben sich folgende Daten: Wird der augenblicklich bei 75 € liegende Preis einer Ware um 5 € erhöht, mindert sich die Zahl der Käufer um 20 %, wird der Preis um 5 € gesenkt, ist ein um 20 % höherer Absatz zu erwarten. Die Ware wurde beim Großhandel zu einem Einkaufspreis von 50 € pro Stück eingekauft. Welche Aussage ist richtig?

(**A**) Der Gewinn ist für 70 € am größten. (**B**) Der Gewinn ist für 75 € am größten.

(**C**) Der Gewinn ist für 80 € am größten. (**D**) In den 3 Fällen ist der Gewinn gleich.

(**E**) Die Informationen sind für eine Gewinnaussage nicht ausreichend.

25. In einem Rechteck $ABCD$ seien P, Q und R die Mittelpunkte der Seiten BC, CD bzw. AD; M sei Mittelpunkt der Strecke QR. Welchen Bruchteil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ macht die Fläche des Dreiecks APM aus?

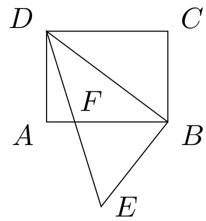


(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{3}{8}$ (**D**) $\frac{5}{16}$ (**E**) $\frac{1}{3}$

26. Eine Folge reeller Zahlen $\{a_n\}$ ist folgendermaßen definiert: $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n \geq 1$, also z. B. $a_2 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Dann ist $a_{2003} =$

(**A**) $\frac{3}{2}$ (**B**) $\frac{2}{3}$ (**C**) 4 (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

27. Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = 16$ und $\overline{BC} = 12$. Der Punkt E sei so gewählt, dass $\sphericalangle DBE = 90°$ und $\overline{BE} = 15$. Wenn F der Schnittpunkt von AB und DE ist, dann ist der Flächeninhalt A_{DBF} des Dreiecks DBF gleich



(**A**) 75 (**B**) 80 (**C**) 96 (**D**) 72 (**E**) 48

28. Es seien α und β zwei voneinander verschiedene Ziffern. Es sei bekannt, dass die Summe der nebenstehenden Additionsaufgabe eine dreistellige Zahl ist. Von welcher Form ist der größtmögliche Wert dieser Summe?
(*Der Buchstabe x steht dabei für eine von α und β verschiedene Ziffer.*)

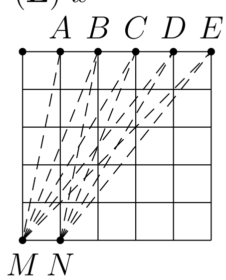
$$\begin{array}{cccc} & \alpha & \alpha & \alpha \\ + & & \beta & \alpha \\ + & & & \alpha \\ \hline \end{array}$$

(**A**) $\alpha\alpha\beta$ (**B**) $\alpha\beta x$ (**C**) $\beta\beta\alpha$ (**D**) $\beta\beta x$ (**E**) $xx\beta$

29. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für die gilt $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Für $x \geq 2$ gilt dann $f(x^2 - 3) =$

(**A**) $x^4 - 4x^2$ (**B**) $x^4 + 4x^2 - 4$ (**C**) $x^4 - 4$ (**D**) $x^8 + 8x^4$ (**E**) x^4

30. In dem in 25 kleine Quadrate geteilten Quadrat (s. Zeichnung) ist die Summe der Maßzahlen der Winkel
$\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN + \sphericalangle MCN + \sphericalangle MDN + \sphericalangle MEN =$



(**A**) 30° (**B**) 45° (**C**) 60° (**D**) 75° (**E**) 90°