Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 16. März 2017 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen, also 0,75 Punkte, 1 Punkt bzw. 1,25 Punkte. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner und andere elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

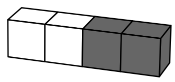
A1 $\dfrac{20 \cdot 17}{2+0+1+7} =$

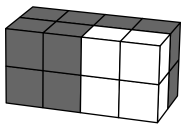
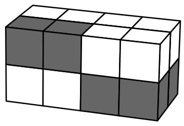
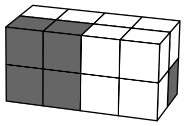
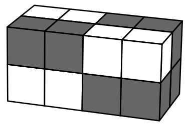
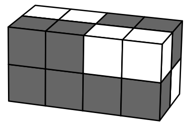
(**A**) 3,4 (**B**) 17 (**C**) 34 (**D**) 201,7 (**E**) 340

A2 Tim besitzt eine Modelleisenbahn. Alles ist im H0-Maßstab 1 : 87 gebaut. Sogar seinen Bruder hat er als kleine, 2 cm hohe Figur exakt nachgebildet. Wie groß ist Tims Bruder in Wirklichkeit?

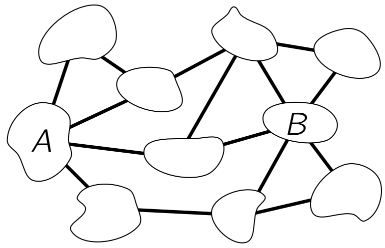
(**A**) 1,74 m (**B**) 1,62 m (**C**) 1,86 m (**D**) 1,94 m (**E**) 1,70 m

A3 Zwei weiße und zwei graue Würfel wurden zu dem rechts abgebildeten Stab zusammengeklebt. Aus vier solchen Stäben lässt sich nur einer der folgenden Quader bauen. Welcher?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

A4 Zehn Inseln sind durch 15 Brücken miteinander verbunden (s. Abb.). Vor einem Sturm wurden für kurze Zeit einige der Brücken gesperrt. Damit bestand dann allerdings keine Verbindung mehr von A nach B. Wie viele der Brücken wurden *mindestens* gesperrt?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

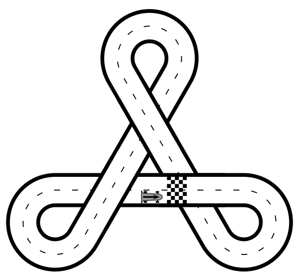
A5 Der Graph der Funktion $f(x) = x$ schneidet die Graphen der folgenden fünf Funktionen. Mit dem Graphen welcher Funktion hat er die *meisten* Schnittpunkte?

(**A**) $g_1(x) = x^2$ (**B**) $g_2(x) = x^3$ (**C**) $g_3(x) = x^4$ (**D**) $g_4(x) = -x^4$ (**E**) $g_5(x) = -x$

A6 Von den beiden positiven Zahlen a und b ist bekannt, dass 75 % von a genauso groß ist wie 40 % von b. Welche der folgenden Gleichungen gilt dann?

(**A**) $15a = 8b$ (**B**) $7a = 8b$ (**C**) $3a = 2b$ (**D**) $5a = 12b$ (**E**) $8a = 15b$

A7 Auf einer Teststrecke fährt ein Auto eine komplette Runde (s. Abb.). Um wie viel Grad dreht es sich dabei um die eigene Achse?



(**A**) um 360° (**B**) um 540° (**C**) um 720° (**D**) um 900° (**E**) um 1080°

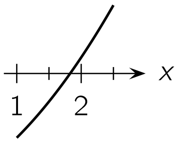
A8 Clementine möchte – ohne zu gucken – einen Ball aus einer der folgenden fünf Kisten nehmen. Auf jeder Kiste steht, wie viele rote und blaue Bälle darin enthalten sind. Bei welcher Kiste ist die Wahrscheinlichkeit am größten, dass Clementine einen blauen Ball herausnimmt?

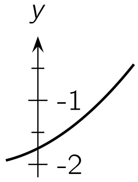
(**A**) 10 blaue, 8 rote (**B**) 6 blaue, 4 rote (**C**) 8 blaue, 6 rote
(**D**) 7 blaue, 7 rote (**E**) 12 blaue, 9 rote

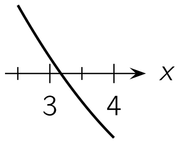
A9 Von den zwei positiven reellen Zahlen p und q ist die Zahl p kleiner als 1 und die Zahl q größer als 1. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

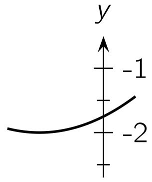
(**A**) $p \cdot q$ (**B**) $p + q$ (**C**) p (**D**) $\frac{p}{q}$ (**E**) q

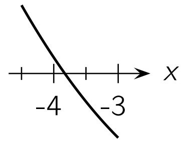
A10 Vier der folgenden fünf Bilder zeigen einen Ausschnitt des Graphen derselben quadratischen Funktion. Welches Bild gehört zum Graphen einer anderen Funktion?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

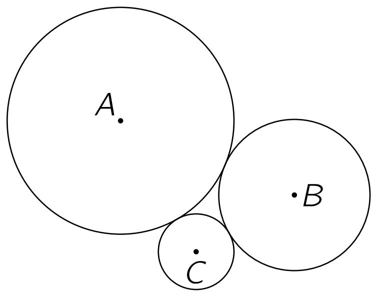
(**E**) 

4-Punkte-Aufgaben

B1 Tiago hat zwei zylindrische Kochtöpfe. Beide haben dasselbe Volumen, aber der Radius des Bodens des einen Topfes ist um 10 % größer als der des anderen. Um wie viel höher ist dafür der andere Topf?

(**A**) um 5 % (**B**) um 9 % (**C**) um 11 % (**D**) um 20 % (**E**) um 21 %

B2 Drei Kreise mit den Mittelpunkten A, B und C berühren einander paarweise wie abgebildet. Ihre Radien sind 3 cm, 2 cm und 1 cm lang. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

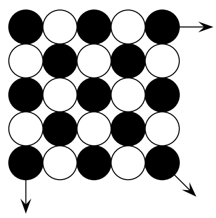


(**A**) $6\,\text{cm}^2$ (**B**) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (**C**) $3\sqrt{2}\,\text{cm}^2$
(**D**) $9\,\text{cm}^2$ (**E**) $2\sqrt{6}\,\text{cm}^2$

B3 Andrew möchte einen Faden in 9 gleich lange Teile zerschneiden und markiert dafür die Schnittstellen. Rachel möchte denselben Faden in 15 gleich lange Teile zerschneiden und markiert ebenfalls die Schnittstellen. Dann zerschneidet Mary den Faden an allen markierten Stellen. Wie viele Teile entstehen dabei?

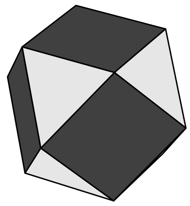
(**A**) 21 (**B**) 22 (**C**) 23 (**D**) 24 (**E**) 25

B4 Ein quadratisches Spielfeld soll mit schwarzen und weißen Chips gelegt werden. Es stehen 109 schwarze und 108 weiße Chips zur Verfügung. Oben links wird mit schwarz begonnen. Im fertigen Spielfeld sollen schwarze und weiße Chips immer abwechselnd liegen (s. Abb.). Es sollen möglichst viele Chips verwendet werden. Wie viele Chips von jeder Sorte bleiben dann übrig?



(**A**) 12 schwarze und 10 weiße (**B**) 11 schwarze und 10 weiße
(**C**) 11 schwarze und 11 weiße (**D**) 10 schwarze und 11 weiße (**E**) 10 schwarze und 10 weiße

B5 Die Oberfläche des rechts abgebildeten Körpers besteht aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken. Jedes der Quadrate grenzt an vier Dreiecke und jedes Dreieck an drei Quadrate. Es gibt sechs quadratische Seitenflächen. Wie viele dreieckige Seitenflächen gibt es?

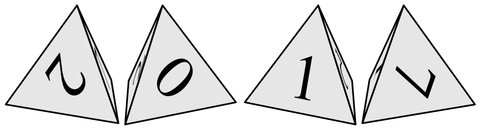


(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

B6 Jarkko und Ville fliegen gemeinsam nach Finnland. Ihr Gepäck wiegt zusammen 60 kg. Am Flughafen wird ihnen mitgeteilt, dass sie zusammen das maximale Gewicht für Freigepäck überschritten haben. Für ihr Übergepäck müssen sie pro Kilogramm einen festen Betrag bezahlen, insgesamt 112 Euro. „Überleg mal“, sagt Jarkko, „wenn ich allein fliegen würde, müsste ich für die 60 kg sogar 296 Euro zahlen.“ Wie viel Freigepäck darf jeder Fluggast auf diesem Flug mitnehmen?

(**A**) 18 kg (**B**) 19,5 kg (**C**) 20 kg (**D**) 23 kg (**E**) 25,5 kg

B7 Vier Tetraeder, bei denen bei jedem auf den vier Seitenflächen die Ziffern 2, 0, 1 und 7 stehen, werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tetraeder so fallen, dass sich mit den Ziffern auf den 12 sichtbaren Flächen wie im Beispiel rechts die Jahreszahl 2017 zusammenstellen lässt?

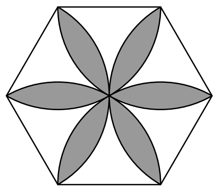


(**A**) $\frac{31}{32}$ (**B**) $\frac{63}{64}$ (**C**) $\frac{81}{256}$ (**D**) $\frac{29}{32}$ (**E**) $\frac{13}{16}$

B8 Wenn sowohl die Quersumme der natürlichen Zahl M als auch die Quersumme von $M+1$ ein Vielfaches von 7 ist, wie viele Stellen hat M dann *mindestens*?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

B9 In das regelmäßige Sechseck mit Seitenlänge 1 wurde eine Blume gezeichnet. Dazu wurde um jeden Eckpunkt des Sechsecks ein Kreisbogen mit Radius 1 konstruiert. Welchen Flächeninhalt hat die graue Blume?



(**A**) $\frac{\pi}{2}$ (**B**) $\frac{2\pi}{3}$ (**C**) $2\sqrt{3}-\pi$ (**D**) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (**E**) $2\pi-3\sqrt{3}$

B10 Auf die 2-stellige natürliche Zahl N treffen genau vier der folgenden sechs Aussagen zu:

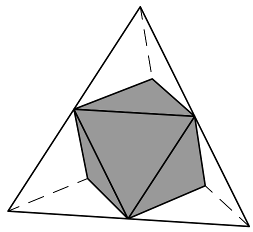
(1) $N < 30$
(2) $N > 50$
(3) Eine der Ziffern von N ist eine 2.
(4) Eine der Ziffern von N ist eine 6.
(5) N ist durch 3 teilbar.
(6) N ist durch 5 teilbar.

Welche Quersumme hat N?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 13

5-Punkte-Aufgaben

C1 Die vier Ecken eines Tetraeders werden so abgeschnitten, dass jede Schnittfläche durch die Mittelpunkte der drei angrenzenden Kanten verläuft (s. Abb.). Welchen Anteil hat das Volumen des grau gezeichneten Restkörpers am Volumen des ursprünglichen Tetraeders?



(**A**) $\frac{4}{5}$ (**B**) $\frac{3}{4}$ (**C**) $\frac{2}{3}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{1}{3}$

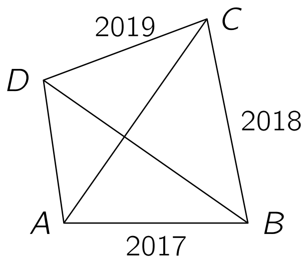
C2 In der Gleichung $5x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$ sind a und b ganze Zahlen. Welche Zahl ist *sicher keine* Lösung dieser Gleichung?

(**A**) $x = 1$ (**B**) $x = -1$ (**C**) $x = 3$ (**D**) $x = 5$ (**E**) $x = 6$

C3 Die Zahlenfolge a_n ist gegeben durch $a_1 = 2017$ und $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Welchen Wert hat a_{2017}?

(**A**) -2017 (**B**) $-\dfrac{1}{2016}$ (**C**) $\dfrac{2016}{2017}$ (**D**) $\dfrac{2017}{2016}$ (**E**) 2017

C4 Im Viereck $ABCD$ schneiden sich die Diagonalen im Inneren des Vierecks im rechten Winkel. Außerdem ist $|AB| = 2017$, $|BC| = 2018$ und $|CD| = 2019$ (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie lang ist die Seite $\overline{AD}$?



(**A**) 2016 (**B**) 2018 (**C**) $\sqrt{2020^2 - 4}$
(**D**) 2020 (**E**) $\sqrt{2018^2 + 2}$

C5 Wie viele 3-stellige natürliche Zahlen $\overline{abc}$ gibt es, für die $(a+b)^c$ eine 3-stellige natürliche Zahl ist, die eine Potenz von 2 ist?

(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 24

C6 In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Summe der drei Seitenlängen 18 cm und die Summe der Quadrate der drei Seitenlängen $128\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

(**A**) $18\,\text{cm}^2$ (**B**) $16\,\text{cm}^2$ (**C**) $12\,\text{cm}^2$ (**D**) $10\,\text{cm}^2$ (**E**) $9\,\text{cm}^2$

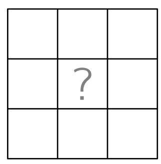
C7 Die Dörfer Villarriba und Villabajo haben zusammen 513 Einwohner. Beim alljährlichen Fest sind in diesem Jahr über 400 Dorfbewohner dabei. Als sie zum Tanzen einen riesigen Kreis bilden, ruft ein jeder fröhlich: „Ich tanze zwischen einem aus Villarriba und einem aus Villabajo!“ Die Leute aus Villarriba sind klaren Kopfes, jeder von ihnen hat die Wahrheit gesagt. Die Leute aus Villabajo jedoch sind schon leicht angetrunken, jeder von ihnen hat sich geirrt. Wie viele Einwohner hat Villarriba höchstens?

(**A**) 312 (**B**) 313 (**C**) 342 (**D**) 379 (**E**) 401

C8 Für die beiden reellen Zahlen x und y gilt $|x| + x + y = 5$ und $x + |y| - y = 10$. Was ist dann $x + y$?

(**A**) 1 (**B**) -5 (**C**) 3 (**D**) 25 (**E**) -15

C9 In jedes der 9 Felder soll eine natürliche Zahl geschrieben werden. Die Summe aller 9 Zahlen soll 777 ergeben, und je zwei horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen sollen sich um genau 1 unterscheiden. Welche Zahl könnte dann im Feld in der Mitte stehen?



(**A**) nur 85 (**B**) nur 85 und 86 (**C**) nur 85 und 87
(**D**) nur 85, 86 und 87 (**E**) nur 87

C10 Auf der Klassenfahrt wollten Adele, Justina und Mateja im Bus Musik von ihrer Lieblingsband hören. Doch nur Mateja hatte an Kopfhörer gedacht. Also saßen die drei Mädchen eng zusammen, immer zwei von ihnen mit einem der beiden Ohrstöpsel im Ohr. Nach jedem Lied wurde gewechselt. Während der Fahrt hörte Adele 18 Lieder und Justina 25. Wie viele Lieder kann Mateja höchstens gehört haben?

(**A**) 29 (**B**) 31 (**C**) 33 (**D**) 35 (**E**) 39