Känguruh 1998

Klassenstufe 11 bis 13

Freitag, 20. März 1998 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen; wenn keine Antwort gegeben wird, gibt es 0 Punkte. Mehr als ein Antwortkreuz zu einer Frage wird als falsche Antwort bewertet.
3. Jeder Teilnehmer bekommt 30 Punkte als Grundpunktzahl zu Beginn. Damit wird eine negative Gesamtpunktzahl verhindert. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150.
4. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

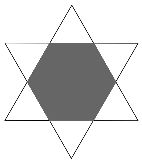
3-Punkte-Fragen

1. Bei einem internationalen Känguruh-Meeting kommt eine Gruppe von 20 Personen zusammen, von denen 18 englisch, 15 französisch und 12 russisch sprechen können. Welches ist die Mindestanzahl von Teilnehmern des Treffens, die alle drei Sprachen sprechen können?

   A: 0 **B:** 1 **C:** 3 **D:** 5 **E:** 12

2. Der abgebildete regelmäßige sechseckige Stern wurde durch das Übereinanderlegen zweier gleichseitiger Dreiecke gebildet. Die sechs weißen Dreiecksflächen des Sterns haben zusammen einen Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$. Dann beträgt der Flächeninhalt (in cm^2) des dunkel gefärbten Sechsecks

   A: 18 **B:** 24 **C:** 30 **D:** 36 **E:** 48



3. Welche Ziffer steht an der Einerstelle der Zahl

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1998?$$

   A: 5 **B:** 7 **C:** 1 **D:** 3 **E:** 9

4. In unserer dunklen Speisekammer stehen 20 Gläser mit Marmelade von der Großmutter, 8 mit Erdbeerkonfitüre, 7 mit Himbeerkonfitüre und 5 mit Brombeerkonfitüre. Einen Teil der leckeren Konfitüren darf ich zur Klassenfahrt mitnehmen. Ich soll sie mir aus der dunklen Kammer holen. Dabei muß ich aber meiner Familie versprechen, daß von einer der Sorten mindestens 4 und von einer weiteren Sorte mindestens 3 Gläser in der Kammer verbleiben. Wieviel Gläser kann ich maximal auf die Klassenfahrt mitnehmen?

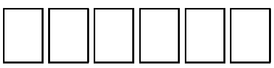
   A: 5 **B:** 6 **C:** 7 **D:** 8 **E:** 9

5. Wenn $\cos x = 0{,}1$ und $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist, dann ist $\sin x$ gleich

   A: $0{,}9$ **B:** $0{,}3 \cdot \sqrt{11}$ **C:** $0{,}1$ **D:** $0{,}09 \cdot \sqrt{11}$ **E:** einem anderen Wert

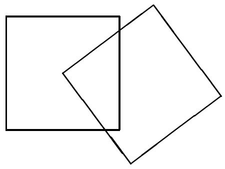
6. Bei der vierstelligen Zahl $17**$ sind die beiden letzten Ziffern verwischt; es ist aber bekannt, daß die Zahl durch 2, 3, 4, 6 und 9 teilbar ist. Die beiden fehlenden Ziffern sind

   A: 6, 4 **B:** 1, 0 **C:** 0, 0 **D:** 2, 8 **E:** 4, 8

7. Anke und Bert haben je drei Karten. Auf Ankes Karten stehen die Zahlen 2, 4 und 6, auf Berts Karten stehen 1, 3 und 5. Sie legen ihre Karten abwechselnd in folgendes Schema: 

   Anke legt als erste eine Karte. Sie verfolgt dabei das Ziel, daß die schließlich entstehende 6-stellige Zahl möglichst klein wird, Bert legt seine Karten so, daß die entstehende 6-stellige Zahl möglichst groß wird. Wie sieht das Ergebnis aus?

   A: 2 5 3 4 1 6 **B:** 1 2 3 4 5 6 **C:** 2 5 4 3 6 1 **D:** 6 5 4 3 2 1 **E:** 2 5 3 1 4 6



8. Der Mittelpunkt eines 2×2-Quadrates fällt mit einer Ecke eines anderen 2×2-Quadrates zusammen. Wie groß ist der Flächeninhalt der Überdeckungsfläche beider Quadrate?

   A: Er hat einen Wert zwischen $\frac{1}{9}$ und 1. **B:** 1 **C:** Er hat einen Wert zwischen 1 und 1,25.
   D: 1,25 **E:** Das kann man aus den gegebenen Werten nicht ermitteln.

9. Welcher der folgenden Terme ist gleich dem Maximum der rellen Zahlen x und y?

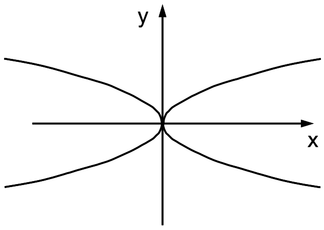
   A: $\frac{x+y}{2} + |x+y|$ **B:** $x - y + \frac{1}{2}|x+y|$ **C:** $\frac{1}{2}(|x-y| + x + y)$ **D:** $x + y + \frac{1}{2}|x-y|$
   E: $x + y - |x - y|$

4-Punkte-Fragen

10. Für wie viele der Funktionen

$$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{-x} \quad ; y = -\sqrt{x}; \quad y = -\sqrt{-x};$$
$$y = -\sqrt{-x}; \quad y = \sqrt{|x|}; \quad y = \sqrt{-|x|}; \quad y = -\sqrt{|x|}$$

ist der Graph in der folgenden Figur enthalten?



A: 4 **B:** 5 **C:** 6 **D:** 7 **E:** 8

11. Wie viele natürliche Zahlen zwischen 1 und 1 000 000 enden auf die Ziffern 1998?

    A: 100 **B:** 99 **C:** 101 **D:** 1001 **E:** eine andere Anzahl

12. Die Funktion f genügt für alle $x \neq 0$ der Gleichung

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Dann ergibt sich für $f(\sqrt{x}) \cdot f(-\sqrt{x})$ bei $x > 0$ der Wert

A: $-\frac{(x+1)^2}{x}$ **B:** $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ **C:** $\frac{x}{x^2+1}$ **D:** $-\frac{x^2+1}{x}$ **E:** $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}$

13. Welche der folgenden Aussagen, die die Diagonalen in konvexen Vielecken betreffen, ist wahr? (Ein Vieleck wird konvex genannt, wenn mit zwei beliebigen Punkten, die zu diesem Vieleck gehören, auch deren Verbindungstrecke vollständig zum Vieleck – Inneres oder Rand – gehört.)

    A: Es gibt ein konvexes Polygon mit 28 Diagonalen.

    B: Falls die Anzahl der Diagonalen ungerade ist, so auch die der Seiten.

    C: Die Anzahl der Diagonalen ist stets größer als die der Seiten.

    D: Es gibt ein konvexes Polygon mit 35 Diagonalen.

    E: Das Polygon mit kleinster Seitenzahl und mehr als 100 Diagonalen ist das 17-Eck.

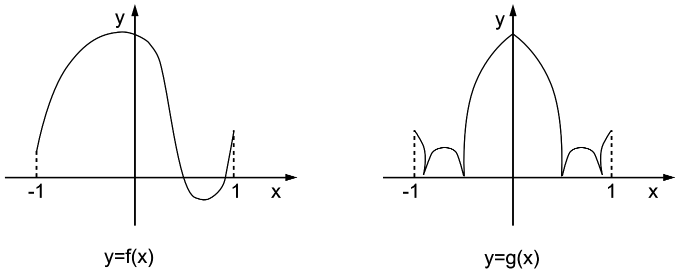
14. Mein Hamster ist zwischen 50 und 70 Wochen alt und bekam vor einiger Zeit Junge, lauter Weibchen, die ich an meine Freunde verschenkte. Es dauerte gar nicht lange, und alle Hamstertöchter bekamen selbst auch wieder Junge. Interessanterweise hatte jeder genausoviel Junge bekommen, wie er Geschwister hat. Die Summe der Anzahl der Hamstertöchter und der Hamsterenkel ist gerade gleich dem Alter meines Hamsters. Wie alt ist mein Hamster und wie viele Enkel hat er?

    A: 56 Wochen und 28 Enkel **B:** 64 Wochen und 56 Enkel **C:** 64 Wochen und 48 Enkel
    D: 68 Wochen und 32 Enkel **E:** andere Daten

15. In einem Dreieck ist die Länge einer Seitenhalbierenden gleich dem Radius des Umkreises des Dreiecks. Welche Form hat dann das Dreieck

A: Es muß spitzwinklig sein. **B:** Es kann rechtwinklig oder stumpfwinklig sein. **C:** Es muß stumpfwinklig sein. **D:** Es muß rechtwinklig sein. **E:** Es kann spitzwinklig oder rechtwinklig sein.

16. Die Abbildung stellt die Graphen der Funktionen f und g auf dem Intervall $[-1, 1]$ dar.



Welche der folgenden Relationen gilt im Intervall $[-1, 1]$?

A: $g(x) = f(|x|)$ **B:** $g(x) = |f(|x|)|$ **C:** $g(x) = |f(x)|$ **D:** $g(x) = f^2(x)$ **E:** keine der aufgeführten

17. Die Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 5 = 0$. Dann ist die Gleichung, die die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$ als Lösungen hat,

A: $x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0$ **B:** $5x^2 + 3x + 1 = 0$ **C:** $15x^2 + x + 1 = 0$ **D:** $x^2 + \frac{1}{3}x + 1 = 0$ **E:** $x^2 + 3x + \frac{1}{5} = 0$

18. Eva hat eine zweistellige Zahl entdeckt, die folgende Eigenschaft besitzt: addiert man zu dieser Zahl jene Zahl, die man aus der ersten durch Vertauschen ihrer beiden Ziffern erhält, so ist die Summe eine Quadratzahl. Wie viele solche zweistellige Zahlen gibt es?

A: 8 **B:** 6 **C:** 5 **D:** 2 **E:** eine andere Antwort

19. Bei einem Handballturnier treten die fünf Mannschaften A, B, C, D und E genau einmal gegen jede andere an. Nach jedem Spiel werden 2 Punkte vergeben: Endet das Spiel unentschieden, erhalten beide Mannschaften je 1 Punkt, anderenfalls bekommt die Siegermannschaft beide Punkte und der Verlierer geht leer aus. Am Ende des Turniers haben alle Mannschaften ein unterschiedliches Punktergebnis; B, der Zweite in der Gesamtwertung, hat genausoviele Punkte wie die Mannschaften C, D und E zusammen. Welche Aussage über das Spiel B gegen C ist richtig?

A: B hat gegen C gewonnen. **B:** C hat gegen B gewonnen. **C:** C hat gegen B nicht gewonnen.

D: Der Sieg von C war möglich, aber nicht so wahrscheinlich wie der Sieg von B.

E: Es läßt sich nichts über das Ergebnis sagen.

5-Punkte-Fragen

20. Welche der folgenden sechsstelligen Zahlen ist stets durch 7 teilbar, egal, welche Ziffern für P und Q (Q $\neq$ 0) gesetzt werden?

A: Q Q P P Q P **B:** Q P Q P Q P **C:** Q P Q Q P P **D:** Q P P Q Q P **E:** Q Q Q P P P

21. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu der Aussage: „Wenn es heute abend nicht regnet, dann werde ich meinen Onkel besuchen.“

A: Wenn es heute abend regnet, dann werde ich meinen Onkel nicht besuchen.

B: Wenn ich meinen Onkel heute abend besucht habe, dann hat es nicht geregnet.

C: Wenn ich meinen Onkel heute abend nicht besucht habe, dann hat es geregnet.

D: Wenn ich meinen Onkel heute abend nicht besucht habe, dann hat es nicht geregnet.

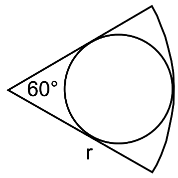
E: Wenn ich meinen Onkel heute abend besucht habe, dann hat es geregnet.

22. Die Ungleichung $(1 - |x|)(1 + x) > 0$ ist genau für alle die reellen Zahlen x erfüllt, für die gilt:

A: $|x| < 1$ **B:** $x < 1$ **C:** $|x| > 1$ **D:** $x < -1$ **E:** $x < -1$ oder $-1 < x < 1$

23. Der in einen Sektor eines Kreises mit dem Radius R und dem Winkel $60°$ einbeschriebene Inkreis hat einen Radius von

A: $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ **B:** $\frac{r}{2}$ **C:** $\frac{r}{3}$ **D:** $\frac{2}{3}r$ **E:** $\frac{r}{4}$



24. Ein Würfel wird an seinen 8 Ecken mit roter und gelber Farbe angemalt. Auf wie viele verschiedene Weisen ist das möglich, wenn zwei Bemalungen genau dann als verschieden angesehen werden, wenn es keine Drehung des Würfels gibt, mit der die eine Bemalung in die andere überführt werden kann.

A: 12 **B:** 14 **C:** 8 **D:** 21 **E:** 15

25. Judith hat sich zum Geburtstag von ihrem Onkel, der Konditor ist, eine kegelförmige Sahnetorte gewünscht. Bei der Geburtstagsfeier will sie die Leckerei mit ihren beiden Brüdern teilen.

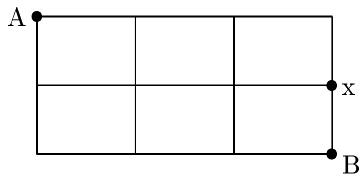
In welchen Höhen muß Judith parallel zur Grundfläche die Torte zerschneiden, wenn jedes der drei Kinder genau ein Drittel bekommen soll und die Torte 12 cm hoch ist ?

A: ca. 8 cm und ca. 4 cm **B:** ca. 7,6 cm und ca. 4,3 cm **C:** ca. 6 cm und ca. 3 cm
D: ca. 5,2 cm und ca. 2,1 cm **E:** ca. 3,7 cm und ca. 1,5 cm

26. Die kleinste natürliche Zahl n, für die man einen Würfel mit der Kantenlänge 2 in ein quadratisches Stück Papier der Größe $n \times n$ einpacken kann, ist

A: 4 **B:** 5 **C:** 6 **D:** 7 **E:** 8

27. Anne spaziert von A-Dorf nach B-Dorf. Zeichnet man die Verbindungswege der beiden Dörfer schematisch auf, so entsteht das nebenstehende Bild. Anne läuft stets nach unten oder nach rechts; kommt sie an eine Kreuzung, wo beide Möglichkeiten bestehen, so wirft sie die Münze und wählt den weiteren Weg entsprechend. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie auf ihrem Weg den Punkt X passiert? (Man beachte, daß die verschiedenen Wege von A-Dorf nach B-Dorf nicht alle gleichwahrscheinlich sind.)



A: $\frac{5}{16}$ **B:** $\frac{1}{2}$ **C:** $\frac{4}{10}$ **D:** $\frac{1}{3}$ **E:** $\frac{5}{12}$

28. Die Gleichung $15x^3 - 23x^2 + 8x - 14 = 0$ hat die reellen Lösungen α, β und γ.

Wie groß ist dann $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$?

A: 32 **B:** $\frac{14}{15}$ **C:** -17 **D:** $\frac{37}{15}$ **E:** 4

29. Die Anzahl der Möglichkeiten, 100 als Summe von zwei oder mehr aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen darzustellen, ist gleich

A: 1 **B:** 2 **C:** 3 **D:** 4 **E:** 5

30. Drei kugelförmige Luftballons schweben in einem Raum. Ihre Mittelpunkte liegen nicht auf einer Geraden. Wie viele verschiedene Ebenen kann es maximal geben, die gleichzeitig alle drei Ballons berühren (d. h. für alle drei Ballons Tangentialebenen sind)?

A: 2 **B:** 4 **C:** 6 **D:** 8 **E:** unendlich viele